Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica

Folleto Introductorio

Editores:

Didier A. Solís Gamboa. (UADY)
Hugo Villanueva Méndez. (UNACH)

Índice general

Temario.

1.1. Combinatoria y Matemáticas Discretas.

1. Principios de conteo
   - Regla de suma y producto.
   - Permutaciones.
   - Combinaciones.
   - Principio de inclusión $-$ exclusión.
2. Inducción matemática.
3. Principio de las casillas.
4. Sucesiones.
5. Recursiones.
6. Grafos.
7. Caminos.
8. Juegos y estrategia ganadora.
9. Problemas dinámicos.
10. Invarianza.
11. Principios extremales (máximo y mínimo).

1.2. Geometría.

1. Teorema de Pitágoras.
2. Teorema de Tales.
3. Congruencia y semejanza de triángulos.
4. Triángulos especiales

- Rectángulos $3-4-5$, $30° - 60$, $45° - 45°$.
- Equiláteros.

5. Trigonometría
   - Funciones de ángulos especiales (múltiplos de 15°).
   - Leyes de seno y coseno.
6. Puntos y rectas notables del triángulo
   - Mediatrices y circuncentro.
   - Bisectrices e incentro.
   - Alturas y ortocentro.
   - Medianas y gravicentro.
   - Bisectrices externas y excentros.
7. Área de un triángulo.
   - Fórmula de Herón.
   - Fórmulas que invlucran el inradio o el circunradio.
   - Fórmulas trigonométricas.
8. Geometría de cuadriláteros.
   - Rectángulos.
   - Paralelogramos.
   - Rombos.
9. Geometría del círculo.
   - Ángulos en una circunferencia.
   - Cuadriláteros cíclicos.
10. Polígonos regulares.
11. Trazos auxiliares.

1.3. Aritmética y Teoría de Números.

1. Algoritmo de la división.
2. Divisibilidad.
   - Propiedades.
   - Criterios.
3. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
4. Números primos.
   - Teorema fundamental de la Aritmética.
   - Lema de Euclides.
5. Congruencias
   - Propiedades.
   - Pequeño teorema de Fermat.
   - Teorema de Wilson.
   - Teorema chino del residuo.
6. Ecuaciones diofantinas.
7. Función de Euler.

1.4. Álgebra.

1. Productos notables.
2. Factorización.
3. Progresiones aritméticas y geométricas.
4. Suma de Gauss
5. Sistema de ecuaciones.
6. Ecuación cuadrática.

- Fórmula General.
- Fórmulas de Vieta.

7. Polinomios y raíces.
8. Desigualdades
    - Propiedades.
    - Inecuaciones.
    - Media aritmética-geométrica.
9. Teorema del binomio.

Convocatoria.

2.1. Justificación.

Las matemáticas son una herramienta básica en el estudio de cualquier tema; son muy útiles para mejorar la calidad de vida y para lograr un desarrollo profesional completo. En la educación básica, primaria y secundaria, el estudiante adquiere habilidades en la escritura, la lectura y la aritmética. Un programa de aprendizaje de las matemáticas debe estimular la creatividad y desarrollar el pensamiento crítico y analítico; uno de los principales objetivos del Programa de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) es promover el estudio de las matmáticas en forma creativa, para desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes participantes; alejándose del enfoque tradicional que promueve la memorización y mecanización de fórmulas y algoritmos.

En el año 2017, la OMM organiza la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica: OMMEB 2017, en los niveles de Primaria y Secundaria. Esto representa una gran oportunidad de colaboración con la educación básica de México en el mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas usando una competencia académica como herramienta para el desarrollo de habilidades matemáticas de los estudiantes equivalente a los estándares internacionales.

2.2. Objetivos.

a) Organizar la OMMEB para Nivel I (4º y 5º de primaria), Nivel II (6º de primaria y 1º de secundaria) y Nivel III (2º de secundaria).

b) Crear una atmósfera académica para motivar a los maestros y estudiantes para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con énfasis en el desarrollo de habilidades cognitivas, de pensamiento crítico y analítico.

c) Establecer cooperación a través de redes para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con organizaciones educativas en los distintos estados y a nivel nacional.

d) Ofrecer a los estudiantes participantes de los distintos estados oportunidades de intercambio cultural, académico y de conocimientos matemáticos.

e) Mejorar la currícula en matemáticas de la educación básica para estar a la par de los estándares internacionales.

2.3. Actividades.

a) Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica en sus tres niveles.

b) Intercambio cultural entre los participantes.

2.4. Programa propuesto.

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica se llevará a cabo del 15 al 18 de junio de 2017, en Oaxtepec, Morelos, con el siguiente programa:

Fecha	Estudiantes	Delegados y coordinadores
15 de junio de 2017	Llegada y registro	Llegada
16 de junio de 2017	Prueba Individual y por Equipos	Prueba Individual y por Equipos
17 de junio de 2017	Intercambio cultural	Revisión de las pruebas
18 de junio de 2017	Premiación	Premiación

2.5. Información General de la OMMEB 2017.

2.5.1. Participación y aplicación.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría, donde la organización del evento será responsable de los gastos de hospedaje y alimentos durante el periodo oficial de la competencia en Oaxtepec, Morelos. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo). Es recomendable que el Delegado estatal asista con su delegación.

2.5.2. Categorías de la competencia.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: 4º y 5º de primaria.

b) Nivel II: 6º de primaria y 1º de secundaria

c) Nivel III: 2º de secundaria.

2.5.3. Perfil de los participantes.

a) Nivel I:

- Estudiantes de 4º y 5º año de nivel primaria o una institución equivalente.
- Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto del 2017.
- Los estudiantes deberán entregar un comprobante escolar que certifique el grado académico que está cursando.

b) Nivel II:

- Estudiantes de 6º año de nivel primaria y 1º de nivel secundaria o en una institución equivalente.
- Los estudiantes no deben haber cumplido 15 años al 1 de agosto del 2017.
- Los estudiantes deberán entregar un comprobante escolar que certifique el grado académico que está cursando.

c) Nivel III:

- Estudiantes de 2º año de nivel secundaria o en una institución equiva-lente.
- Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto del 2017.
- Los estudiantes deberán entregar un comprobante escolar que certifique el grado académico que está cursando.

2.5.4. Costo de inscripción.

La inscripción a la competencia tendrá un costo de $6,000.00 pesos por equipo (3 alumnos y un líder, es decir, $1,500.00 pesos por persona).

2.5.5. Exámenes.

a) Hay dos tipos de exámenes: individual y por equipos. El formato de los exámenes es el siguiente:

† Prueba Individual:

- Nivel I: constará de 15 problemas a responder en 90 minutos. Solo la respuesta es necesaria. Cada problema tendrá un valor de 10 puntos. Para los problemas que tengan más de una respuesta, se dará el total de puntos SÓLO si todas las respuestas escritas son las correctas. No se darán puntos parciales. No hay penalización por respuesta incorrecta.

- Niveles II y III: Constará de 15 problemas a responder en 120 minutos. Los problemas se dividen en dos partes: La Parte A consistirá de 12 problemas en los cuales solo la respuesta es requerida. Para los problemas que tengan más de una respuesta, se dará el total de puntos SÓLO si todas las respuestas escritas son las correctas. No se darán puntos parciales. No hay penalización por respuesta incorrecta. Cada problema tendrá un valor de 5 puntos. La Parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten su procedimiento y respuesta. Cada problema de la Parte B tendrá un valor de 20 puntos y se podrán otorgar puntos parciales. El examen tiene una puntuación total de 120 puntos.

‡ Prueba por Equipos: En los tres niveles, la prueba por equipos consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos de la siguiente manera:

- En los primeros 10 minutos, se le entregará a cada equipo los primeros seis problemas. Durante estos 10 minutos, los integrantes del equipo pueden platicar y comentar las posibles soluciones de los problemas, pero NO podrán escribir nada. También se repartirán los 6 problemas de manera que a cada participante le corresponda al menos un problema.
- Los siguientes 35 minutos, cada miembro del equipo trabajará de manera individual los problemas que le fueron asignados. Durante este tiempo, sí podrán escribir.
- En los últimos 15 minutos, los tres miembros del equipo recibirán los últimos dos problemas, los cuales podrán trabajar de manera conjunta y redactar las respectivas soluciones.
- En los problemas 1, 3, 5 y 7, SÓLO se requiere la respuesta; no se darán puntos parciales. En los problemas 2, 4, 6 y 8 se requieren las soluciones completas, acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten su procedimiento y respuesta; se podrán dar puntos parciales.
- Cada problema de la Prueba por Equipos tendrá un valor de 40 puntos.

b) Cada estado deberá enviar al menos 9 problemas propuestos, usando formato Word o LaTex, escritos con solución, para los tres niveles; específicamente, al menos 3 problemas para cada nivel. Deberán enviar los problemas a más tardar el 1 de mayo de 2017, así, el Comité Académico de la OMMEB los podrá considerar al momento de elaborar los exámenes de la competencia. Los delegados deberán abstenerse de usar los problemas que han propuesto en sus exámenes o entrenamientos estatales o alguna otra competencia.

2.5.6. Comité Académico de la OMMEB.

El comité académico de la OMMEB está integrado por:

Juan Ramón Camacho Cordero,
Héctor Flores Cantú,
Ricardo Díaz Gutiérrez,
José Antonio Gómez Ortega,
Olga Rivera Bobadilla,
Didier Solís Gamboa,
Rogelio Valdez Delgado (Presidente),
Hugo Villanueva Méndez (Secretario General).

2.5.7. Premios y reconocimientos.

a) Premio Individual: Medallas de Oro, Plata, Bronce y Menciones Honoríficas. Aproximadamente dos terceras partes de los participantes recibirán premio individual, en forma de medallas de Oro, Plata y Bronce así como Menciones Honoríficas, aproximadamente en la razón 1:2:3:4.

b) Premio por equipos: Medallas de Oro, Plata, Bronce y Menciones Honoríficas. En la prueba por equipos, la puntuación total de todos los miembros de cada equipo es considerado el puntaje de equipo. Los equipos serán primero ordenados por su puntaje de equipo, el criterio de desempate será de acuerdo al puntaje en cada uno de los problemas de la prueba por equipos, comenzando con el más difícil (problema 8). Los premios serán dados a las dos terceras partes de los equipos, en razón 1:2:3:4.

c) Premio de Grupo: Medallas de Oro, Plata, Bronce y Menciones Honoríficas. El puntaje de grupo es la suma de los dos puntajes más altos de la Prueba Individual en cada equipo. Los equipos serán primero ordenados por su puntaje de grupo. En caso de empate, gana el equipo cuya suma de los puntajes de las pruebas individuales de los tres miembros del equipo será el ganador. Los premios serán dados a las dos terceras partes de los equipos, en razón 1:2:3:4.

d) Premio Absoluto: Trofeos de Campeón de Campeones, Segundo Lugar y Tercer Lugar. El Premio Absoluto será ganado por el equipo que tenga el más alto puntaje calculado como sigue: la suma de los puntajes de los tres miembros del equipo en la Prueba Individual y el puntaje de equipo en la Prueba por Equipos. Serán premiados tres equipos, se entregará un trofeo al primer lugar (Campeón de Campeones), uno al segundo lugar y uno al tercer lugar. Se pueden dar empates.

e) Constancias: Cada participante recibirá una constancia de participación en la OMMEB 2017.

2.6. Asistencia médica para los participantes.

Los delegados deberán contratar un seguro contra accidentes para todos los es-tudiantes durante el periodo oficial de la competencia. El seguro deberá cubrir las consecuencias de los accidentes, como muerte e inhabilitación de partes del cuerpo.

2.7. Periodo de aplicación y procedimiento.

a) Cada estado deberá confirmar su asistencia a más tardar el 31 de marzo de 2017.

b) Enviar el formato de registro debidamente llenado a más tardar el 5 de ma-yo de 2017.

c) Enviar Problemas propuestos a más tardar el 1 de mayo de 2017.

d) Informar itinerario de llegada y salida a más tardar el 10 de mayo de 2017.

e) Confirmar itinerario a más tardar el 20 de mayo de 2017.

Cada estado participante deberá enviar la información a los correos: ommeb2017@gmail.com, omm@ciencias.unam.mx, hvillam@gmail.com

2.8. Gastos. (Periodo oficial 15 al 18 de junio de 2017).

a) Los organizadores serán responsables de todos los gastos oficiales de los equipos estatales participantes (4 personas por equipo como máximo), incluyendo hospedaje, alimentación y paseos durante el periodo oficial de la competencia.

b) Los participantes extras, observadores, profesores, padres y personas acompañantes tendrán que pagar un costo de $3,500 pesos por el hospedaje, alimentos y paseos durante el periodo oficial del evento, además de confirmar su asistencia a más tardar el

25 de mayo, de no hacerlo las reservaciones y alimentos correrán por su cuenta y fuera del evento (aunque puede ser dentro del centro vacacional).

c) Cada equipo participante es responsable de los gastos de transportación desde sus respectivos estados al lugar sede de la competencia.

d) Recomendamos a los padres y personas acompañantes registrarse de manera oficial a través del respectivo delegado de la OMMEB en el estado. Aquellos que no se registren y estén interesados en participar en las actividades de la OMMEB, los organizadores se reservan el derecho de admisión a dichas actividades.

2.9. IMC.

Los ganadores de los distintos niveles se pre-seleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en Burgas, Bulgaria durante el verano de 2018.

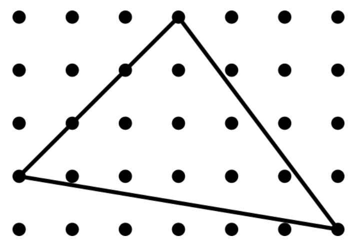
2.10. Responsable.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
Cubículo 201,
Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias, UNAM.
Col. Copilco, Delegación Coyoacán.
C. P. 04510.
Ciudad de México.
Teléfono: (55) 5622-4864,
Fax: (55) 5622-5410,
Email: omm@ciencias.unam.mx

Problemas de práctica. Nivel I.

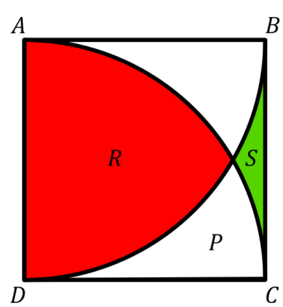
1. A Tony le gusta jugar con números. La otra tarde le comentó a su amigo Cristian lo siguiente: He pensado en un número y le he restado 1, después al resultado lo dividí entre 10, después le volví a restar 1 al resultado, después lo volví a dividir entre 10, y al final lo he dividido entre 2. Tony le dijo a Cristian que el resultado final que obtuvo después de hacer todo lo anterior fue 10. ¿Cuál es el número que pensó Tony?

2. Si todos los puntitos en la siguiente figura se encuentran a distancia de 1 cm horizontal y verticalmente, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



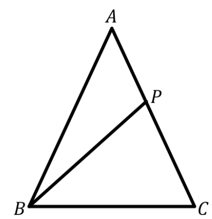
3. Un árbol de 2 metros de altura fue plantado en el patio de la casa de Ceci y en los años siguientes creció una misma cantidad de metros por cada año. Después de 6 años en el patio de Ceci, el árbol medía el doble de altura que cuando tenía 2 años. ¿Cuál era la altura del árbol cuando tenía 4 años?

4. En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado de lado $L = \sqrt{2}$. Encuentra el valor de la diferencia entre las áreas de las regiones R y S.



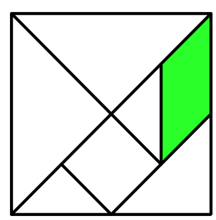
5. En un salón se hace una pequeña encuesta para determinar la preferencia de los estudiantes respecto a los refrescos de cola. Tres cuartos de los encuestados dijeron que les gusta el refresco normal, a tres quintos les gusta la versión de dieta y a un sexto no le gusta ninguno. ¿A qué porción de los encuestados le gusta tanto la versión normal como la de dieta?

6. En la siguiente figura, $AB = AC$ y $BC = BP$. Si $\angle CAB$ mide $50°$, ¿cuánto mide $\angle CBP$?



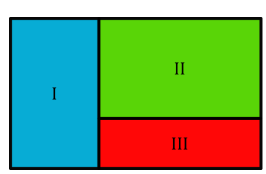
7. Deeds compró un limón y tres naranjas y pagó \$7.00. Ernesto compró tres limones y dos naranjas, Drini compró cinco limones y una naranja, y Rex compró siete limones y una naranja. Si cada limón cuesta la mitad de lo que cuesta una naranja, ¿quién pagó más y cuánto pagó?

8. Se construye un rompecabezas recortando un cuadrado de 4 cm de lado en cinco triángulos, un cuadrado y un paralelogramo como en la figura. ¿Cuál es el área del paralelogramo?

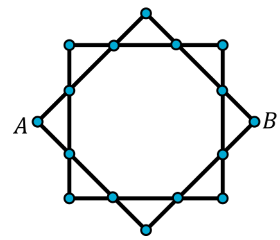


9. Sólo uno de los números 234, 2345, 23456, 234567, 2345678, 23456789 es primo. ¿Cuál de ellos es?

10. La siguiente figura está formada por los rectángulos I, II y III. El rectángulo I tiene 42 cm de perímetro y su lado más pequeño mide 6 cm. Si el rectángulo II tiene 40 cm de perímetro y el rectángulo III tiene 38 cm de perímetro, ¿cuál es el perímetro de la figura completa?

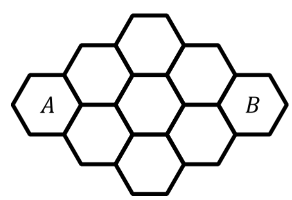


11. A continuación se presenta el mapa del laberinto del Rey Drini, donde las líneas representan pasadizos secretos y los puntos representan calabozos. ¿De cuántas formas puede el carcelero Antonio ir del calabozo A al calabozo B si no puede pasar dos veces por el mismo calabozo?

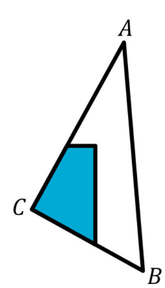


12. ¿Cuántos enteros positivos dividen tanto a 360 como a 600?

13. Una abeja tiene que atravesar el panal que se muestra en la siguiente figura, para ir de la celda A a la celda B. Si en cada brinco puede moverse una casilla hacia arriba, hacia abajo, o una casilla vecina de la derecha, pero no puede retroceder a una casilla que está a su izquierda, ni pasar dos veces por la misma casilla ¿de cuántas maneras puede hacer el recorrido?



14. En la figura, $\angle ACB$ es recto y C es el centro de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm y que está recortado por el triángulo. ¿Cuánto vale el área sombreada?



15. Encuentra el número entero y positivo más pequeño que al dividirlo entre 2 resulte en un cuadrado perfecto y al dividirlo entre 3 resulte en un cubo perfecto.

16. Un grupo de amigos se junta para tomar una taza de café. La quinta parte del grupo come además un pastelito. A la hora de pagar le dan al mesero \$250, que incluye tanto el consumo total como la propina. Si cada taza de café cuesta \$35 y cada pastelito \$52, ¿cuánto le queda al mesero de propina?

17. Un número es *feliz* si la suma de sus cifras es 9, por ejemplo 12,033 es un número feliz. ¿Cuántos números felices menores que 1000 hay?

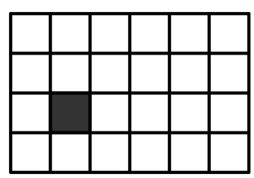
18. En una clase de 52 estudiantes, 30 practican nado, 35 futbol y 42 basquetbol. ¿Cuál es el mínimo número posible de estudiantes que practican los tres deportes?

19. Encuentra el mayor número de 4 dígitos que al dividirse entre 2, 3, 4, 5, 6, y 7, deja residuo 1 en cada caso.

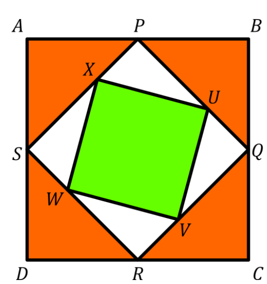
20. El producto de un número de dos cifras con uno de tres cifras es 23,871. ¿Cuánto vale su suma?

21. El número $25^{64} \times 64^{25}$ es el cuadrado de un entero positivo N. ¿Cuál es la suma de los dígitos de N?

22. Se escoge un rectángulo de la siguiente cuadrícula. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho rectángulo incluya al cuadrito negro?



23. En la siguiente figura aparecen tres cuadrados: $ABCD, PQRS, UVWX$. Si $AP = PB$ y $PU = 2UQ$, ¿cuál es el resultado de dividir el área del cuadrado $UVWX$ entre el área del cuadrado $ABCD$?



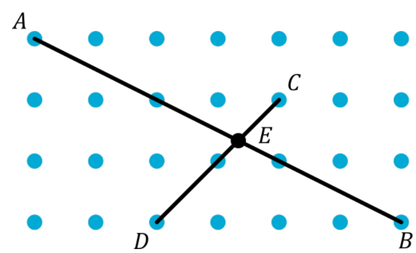
24. Un número 23−*suertudo* es un número natural de cuatro dígitos que es divisible por 3 y sus dos últimos dígitos son 23. Por ejemplo 1023 es un número 23−suertudo. ¿Cuántos números 23−suertudos hay?

25. Se construye una cuadrícula de $n \times n$ puntos y a continuación se pintan los puntos de blanco o negro de manera que en ningún rectángulo con vértices en la cuadrícula y lados paralelos a los lados de la cuadrícula tenga sus cuatro vértices del mismo color. Halla el valor máximo que puede tener n.

Problemas de práctica. Nivel II.

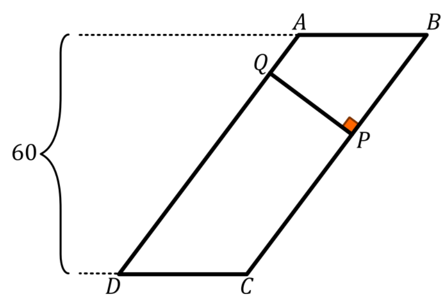
Parte A

1. En la siguiente cuadrícula, la distancia que separa dos puntitos consecutivos (horizontal o verticalmente) es de 1 cm. Halla la longitud del segmento BE.



2. Halla el valor de
$$\frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)}{2^{64}-1}.$$

3. En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo. $AB = 10$ y $BC = 75$. Además, la distancia que separa a las rectas AB y DC es 60. Halla la longitud PQ.



4. Denotemos por $S(n)$ a la suma de los dígitos de n. Si N es un número de dos cifras tal que $N = 3S(N) + 8$, ¿qué posibles valores puede tomar el dígito de las unidades de N?

5. Pedro y Pablo presentaron un examen. Pedro falló en $1/9$ de las preguntas y Pablo tuvo 7 respuestas correctas. Además el número de preguntas donde ambos tuvieron la respuesta correcta es $1/6$ del total. ¿Cuántas preguntas respondió bien Pedro?

6. El rectángulo $ABCD$ tiene lados enteros. Además, el valor numérico de su perímetro es igual al de su área. Halla la suma de todos los posibles valores de dicha área.

7. Si todos los números de 5 cifras que se pueden escribir usando los dígitos del 1 al 5 (se vale repetir los dígitos) se escriben en orden de menor a mayor, ¿qué lugar ocupa el número 51,432?

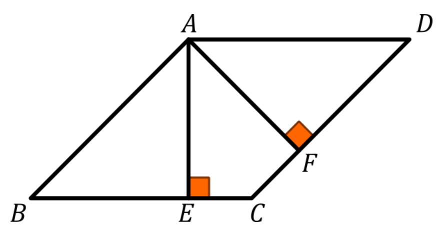
8. Deeds va escribiendo los números naturales en forma triangular como se muestra en la figura:

Primera fila:	1			
Segunda fila:	2	3		
Tercera fila:	4	5	6	
Cuarta fila:	7	8	9	10

   El lápiz de Deeds se gasta justo cuando acaba de terminar de escribir la centésima fila. ¿Cuánto vale la suma de los números de esa fila?

9. ABC es un triángulo equilátero tal que su perímetro es igual al área de su circunferencia inscrita. Halla los posibles valores del radio de dicha circunferencia.

10. En el paralelogramo $ABCD$, tenemos que AE es perpendicular a BC, AF es perpendicular a CD y $\angle EAF = 45°$. Si $AE + AF = 2\sqrt{2}$, halla el perímetro de $ABCD$.



11. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (n, k) que satisfacen $n^3 - 2 = k!$

12. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro números primos distintos tales que

$$\begin{aligned} 2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 &= 162, \\ 11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 &= 162. \end{aligned}$$

   Encuentra todos los posibles valores del producto $p_1p_2p_3p_4$.

13. El punto M está sobre el lado BC del triángulo ABC de manera que $BM = AC$. H es el pie de la perpendicular bajada desde B sobre AM. Se sabe que $BH = CM$ y $\angle MAC = 30°$. Encuentra los posibles valores de $\angle ACB$.

14. Encuentra todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos tales que a, b, c son los lados de un triángulo rectángulo cuya área es $a + b + c$.

15. Se sabe que para un número natural n, el número $n^3 + 2009n^2 + 27n$ termina en 3. Encuentra los tres últimos dígitos del número.

16. Encuentra el máximo entero x tal que existe un entero positivo y que cumple $2^{2x} - 3^{2y} = 55$.

17. El producto de dos de los primeros 17 enteros positivos es igual a la suma de los restantes 15. ¿Cuál es la suma de estos dos números?

18. En ΔABC se toman puntos D, E en los lados BC, AC, respectivamente de modo que DE es paralelo a AB. Además $BC = 13$, $AC = 14$ y $AB = 15$. Si ΔEDC y el cuadrilátero $ABDE$ tienen el mismo perímetro, halla BD/DC.

Parte B

19. En ΔABC se inscribe un rectángulo de manera que su base quede sobre el lado BC. Además, $BC = 10$ y la altura de A hacia BC mide 8. Halla el valor máximo que puede alcanzar el área de un rectángulo con estas características.

20. En ΔABC, M y N son los puntos medios de los lados BC y AC, respectivamente. Considera un punto P en el interior del triángulo tal que $\angle BAP = \angle ACP = \angle MAC$. Prueba que $\angle ANP = \angle AMB$.

21. Sean a, b números reales tales que $a < b < 0$ y $a^2 + b^2 = 4ab$. Halla el valor de $\dfrac{a-b}{a+b}$.

22. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero $ABCD$ se intersecan en O. Se sabe que la diagonal BD es perpendicular al lado AD, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$, $\angle ADC = 135°$. Encuentra la razón DO/OB.

23. Halla el mayor número de puntos de intersección que se pueden obtener al intersecar dos cuadriláteros.

24. Hay cinco pilas con 42, 70, 105, 462 y 2009 piedras, respectivamente. Se permite hacer alguno de estos movimientos en cada paso: se toman dos pilas con a y b piedras y se cambian por:

$a)$ dos pilas con a y $a+b$ piedras;

$b)$ dos pilas con a y $|a-b|$ piedras.

También se pueden tomar k pilas diferentes, de manera que el número total de piedras es kn con n un número natural y crear en su lugar:

c) k pilas de n piedras

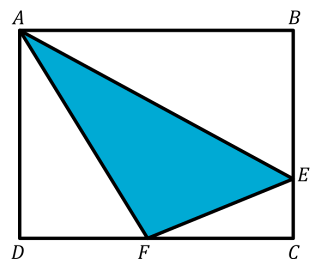
¿Se pueden hacer cinco pilas cada una de las cuales consiste de 2008 piedras? ¿y de 2009 piedras?

25. ¿Cuál es el mayor entero $n < 999$ tal que $(n–1)^2$ divide a $n^{2016}–1$?

Problemas de práctica. Nivel III.

Parte A

1. En el rectángulo $ABCD$, $BE/EC = 5/2$ y $DF/CF = 2$. Halla el área de ΔABC si el área de $ABCD$ es 1764.



2. ¿Cuántos enteros n cumplen que que $\dfrac{n}{40-n}$ es un cuadrado perfecto?

3. En una competencia participan 7 niñas y 1 niño. En el hotel donde se hospedan hay 5 habitaciones disponibles con dos camas cada una para alojarlos. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar las habitaciones si el niño debe estar solo?

4. Un octágono regular se construye a partir de un cuadrado de lado 1 recortando sus cuatro esquinas. Halla el área del octágono.

5. En una escuela hay dos salones: en el salón A hay m niños y 11 niñas, en tanto que en el salón B hay 9 niños y n niñas. Se está organizando un baile y cada salón debe contribuir con la misma cantidad de dinero para la organización de la fiesta. Para ello, todos los estudiantes del mismo salón pagan la misma cantidad (un número entero) de pesos. La cantidad que aportó cada salón fue de $mn + 9m + 11n + 145$ pesos. ¿Cuánto aportó cada estudiante del salón B?

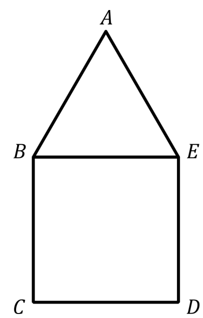
6. Sea $0 < m < 1$ la parte decimal de $\sqrt{5}$. Halla el valor de $m^2 + 2(m + \sqrt{5})$.

7. En el rectángulo $ABCD$ los triángulos ABE, ECF y FDA tienen áreas de 4, 3 y 5, respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo AEF? (ver figura del problema 1).

8. ¿De cuántas maneras pueden dividirse 8 manzanas, 3 naranjas, 2 ciruelas y 1 mandarina entre 3 personas?

9. En el triángulo rectángulo isósceles ABC con $\angle BAC = 90°$, se toma un punto D sobre el lado BC tal que $BD = 2DC$. Sea E el pie de la perpendicular bajada desde B a la recta AD. Encuentra $\angle CED$.

10. El pentágono de la figura está formado por un cuadrado y un trángulo equilátero de lado 2. Halla el radio de la cirunferencia que pasa por los puntos A, D y C.



11. Alrededor de una mesa circular se sientan n personas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a jugar un juego con monedas. La persona p_1 tiene una moneda más que la persona p_2, quien tiene una moneda más que la persona p_3, etc. El juego consiste en lo siguiente: p_1 le da una moneda a p_2, quien luego le da 2 monedas a p_3, quien luego le da 3 monedas p_4 y así sucesivamente (p_n le da n monedas a p_1, quien luego le da $n+1$ monedas a p_2, etc.) El juego concluye cuando algún jugador ya no puede dar las monedas que le corresponde dar. Al finalizar el juego se observa que existe una pareja de jugadores consecutivos tales que uno de ellos tiene 5 veces más monedas que el otro. ¿Cuáles son las posibles cantidades de monedas que había en la mesa?

12. Sea A el conjunto de los números naturales que satisface las siguientes tres propiedades:

    (1) ningún número de A es divisible entre 3,

    (2) ningún número de A es dividible entre 4 y

    (3) todos los números de A son divisibles entre 5.

    Si se ordenan los números de A de menor a mayor, ¿qué número ocupa el lugar 79?

13. Drini tiene 1000 cajas, numeradas del 1 al 1000, y muchísimas pelotas. En cada caja caben 3 pelotas. Drini inventa el siguiente juego: en el primer turno pone una pelota en la caja marcada con el 1. En cada turno subsiguiente, pone una pelota en la primera caja donde todavía haya lugar para acomodar la pelota y a continuación vacía todas las cajas anteriores. ¿Cuántas pelotas habrá en total en las cajas al término del turno 2016?

14. Hugo practica el siguiente juego: escribe n números naturales en un pizarrón. Luego toma dos de estos números a y b y, si $\dfrac{a+b}{a-b}$ es número natural, lo escribe en el pizarrón. Halla todos los números naturales que puede escribir en el pizarrón si empieza con $\{1,2\}$. ¿Qué números podrá escribir si empieza con $\{1,3\}$?

15. Los números reales a, b, c son distintos dos a dos y satisfacen

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Encuentra todos los valores posibles de abc.

16. Cinco personas van al super a comprar. ¿De cuántas formas se pueden formar en fila en las cuatro cajas registradoras del super?

17. Un círculo de radio 12 en tangente a los cuatro lados de un trapecio $ABCD$ donde AB y DC son paralelos. Si $BC = 25$ cm y el área de $ABCD$ es 648 cm^2, determine la longitud de DA.

18. Sea n un entero positivo. Tanto Tom como Jerry tienen algunas monedas. Si Tom le da n monedas a Jerry, entonces Jerry tendrá 2 veces el número de monedas que le quedaron a Tom. Si por el contrario, Jerry le da 2 monedas a Tom, Tom tendrá n veces el número de monedas que le quedaron a Jerry. Halla la suma de todos los posibles valores de n.

Parte B

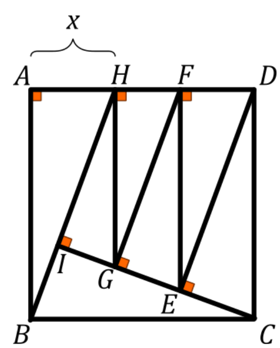
19. Encuentra todas las soluciones de la ecuación $x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 88$.

20. En el triángulo ABC tenemos $AB = AC$ y $\angle BAC = 100°$. Sea D un punto en AC tal que $\angle ABD = \angle CBD$. Prueba que $AD + DB = BC$

21. $P(x)$ es un polinomio de grado 2015 tal que $P(k) = 1/k$ para $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Halla el valor de $P(2017)$.

22. Sea x un número real tal que las diferencias entre los números x^{1919}, x^{1960} y x^{2001} son todas enteras. Demuestra que x es entero.

23. En la siguiente figura, un cuadrado de lado 1 está dividido en 7 triángulos rectángulos.



Demuestra que x satisface la ecuación

$$x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0.$$

24. Encuentra todos los números reales x tales que el número $x^n + x^{-n}$ es entero para cualquier n natural.

25. Sean a, b, c números reales positivos tales que

$$\frac{8a^2}{a^2+9} = b, \quad \frac{10b^2}{b^2+16} = c, \quad \frac{6c^2}{c^2+25} = a.$$

Encuentra $a + b + c$.

Respuestas.

6.1. Nivel I.

1. 2011.
2. 10.5 cm^2.
3. 6 metros.
4. Área $= \pi - 2$.
5. $\dfrac{31}{60}$.
6. $\angle CBP = 50°$.
7. Rex pagó la mayor cantidad: \$ 9.00.
8. Área =2 cm^2.
9. 23,456,789.
10. Perímetro = 66 cm.
11. 64 maneras.
12. 16 divisores en común.
13. 64 caminos.
14. Área =2 cm^2.
15. 648.
16. \$23 de propina.
17. 55 números felices.
18. 3 estudiantes.
19. 9661.
20. $73 + 327 = 400$.

21. $2 + 4 + 8 = 14$.
22. $P = \dfrac{2}{7}$.
23. $\dfrac{5}{18}$.
24. 30 números 23-suertudos.
25. $n = 4$.

6.2. Nivel II.

1. $BE = \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ cm.
2. 1.
3. $PQ = 8$.
4. 3
5. 32 preguntas.
6. $18 + 36 = 34$.
7. $500,050$.
8. $\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$.
9. Perímetro $= 8$.
10. $(n, k) = (2, 3)$.
11. $p_1p_2p_3p_4 = 5 \times 3 \times 2 \times 19 = 570$.
12. $\angle ACB = 15^\circ$ o $\angle ACB = 105^\circ$.
13. $(a, b) = (5, 12)$ o $(a, b) = (6, 8)$.
14. 973.

15. $x = 3$.

16. 23

17. $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{2}{7}$.

18. Área $= 20$.

21 $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

22 $\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{1}{2}$.

23 16 intersecciones.

24 Con 2008 es imposible. Sí es posible con 2009.

19. $n = 673$.

6.3. Nivel III

1. Área $= 462$.

2. $(m.n) = (0,0),\ (1,20),\ (2,32),\ (3,36)$.

3. $12,600$ asignaciones.

4. Área $= 2\sqrt{2} - 2$.

5. \$25 o \$47.

6. 5.

7. Área $= 8$.

8. 8,100 maneras

9. $\angle CED = 45°$.

10. 2.

11. 6 o 63 monedas.

12. 133.

13. 9 pelotas.

14. Todos los números naturales (en cada caso).

15. $abc = \pm 1$.

16. 6720 maneras.

17. $DA = 29$ cm.

18. $1 + 2 + 3 + 8 = 14$.

19. $x = \dfrac{22}{7}$.

21 $P(2017) = 0$.

24 $x = \dfrac{m}{2} + \sqrt{\dfrac{m^2}{4} - 1}$.

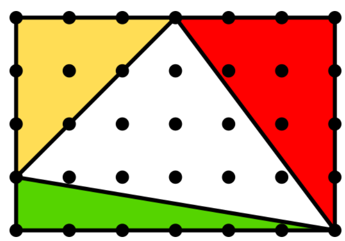
25 $a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12$.

Soluciones.

7.1. Nivel I

1. Razonando hacia atrás, comenzando por el resultado final llevamos a cabo las operaciones inversas para obtener el número original, que es 2011.

2. Es difícil calcular el área del triángulo ya que desconocemos las medidas de su base y su altura. En principio, la base podría calcularse mediante la aplicación del teorema de Pitágoras, pero la altura es más complicada de calcular. Sin embargo, la solución puede obtenerse con facilidad si consideramos el rectángulo que aparece en la figura:



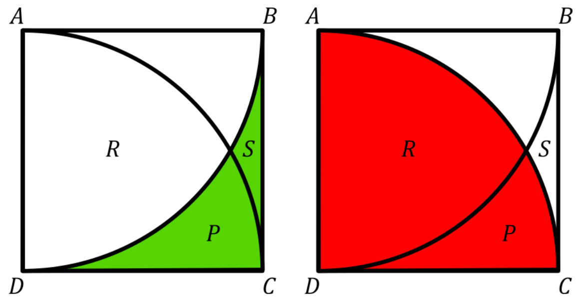
   El área del triángulo que buscamos es igual al área del rectángulo menos el área de los tres triángulos sombreados que se formaron. Así el área buscada es:

$$6 \times 4 - \frac{6 \times 1}{2} - \frac{3 \times 4}{2} - \frac{3 \times 3}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5\text{cm}^2.$$

3. Representemos por d la cantidad de metros que aumenta durante un año. Así, al cumplir dos años medirá $2 + d + d = 2 + 2d$ metros de altura. Por otra parte, en los cuatro años siguientes aumentó también $2 + 2d$ metros para así alcanzar el doble de esa altura. Por tanto $4d = 2 + 2d$ y encontramos $d = 1$, de manera que a los 4 años de edad tendrá $2 + 4d = 6$ metros de altura.

4. Observemos que las regiones P y R al juntarse forman un cuarto de círculo de radio L. Por tanto Área $(R) = \dfrac{\pi L^2}{4} -$ Área (P).

   Por otro lado, si juntamos las regiones P y S obtenemos una región cuya área es la diferencia entre el área del cuadrado y un cuarto de círculo. Entonces tenemos



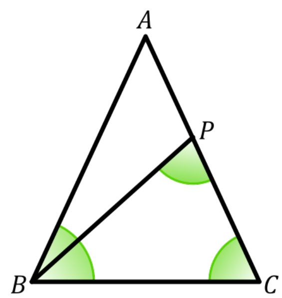
Área $(S) = L^2 - \frac{\pi L^2}{4} -$ Área (P). Por tanto

$$\begin{aligned} \text{Área } (R) - \text{Área } (S) &= \frac{\pi L^2}{4} - \text{Área } (P) + L^2 - \frac{\pi L^2}{4} + \text{Área } (P) \\ &= L^2(\frac{\pi}{2} - 1) = \pi - 2 \end{aligned}$$

5. Notemos que la proporción de estudiantes que gustan de alguna de las dos opciones es $1 - 1/6 = 5/6$. Si denotamos por C la proporción que gusta del refresco de cola, por D la proporción que gusta de la verión de dieta y por $C \cap D$ la proporción de los que gustan de ambos, aplicando directamente el principio de inclusión-exclusión tenemos que
$$C \cap D = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{5}{6} = \frac{31}{60}.$$

6. Como ΔBAC es isósceles entonces $\angle ABC = \angle ACB$. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, entonces tenemos que
$$\angle ACB = \frac{180° - 50°}{2} = 65°.$$
Por otro lado, ΔBPC también es isósceles y por tanto $\angle PCB = \angle CPB$. Entonces
$$\angle CBP = 180° - 2\angle PCB = 180° - 2 \times 65° = 50°.$$

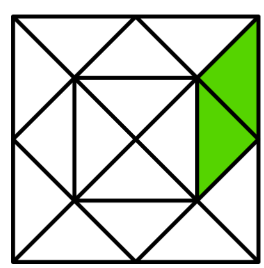
7. Cada naranja cuesta lo mismo que dos limones. Vamos a convertir todas las cantidades a su equivalente "en limones":
   - Deeds compró 1 limón y 3 naranjas = 7 limones
   - Ernesto compró 3 limones y 2 naranjas = 7 limones.



- Drini compró 5 limones y 1 naranja = 7 limones.
- Rex compró 7 limones y una naranja = 9 limones.

Por tanto, Rex pagó más. Por otro lado, como Deeds compró el equivalente a 7 limones y pagó \$7.00, podemos concluir que cada limón cuesta \$1. Así que Rex pagó \$9.00.

8. Dividamos el cuadrado en 16 triángulos congruentes, como se indica a continuación.



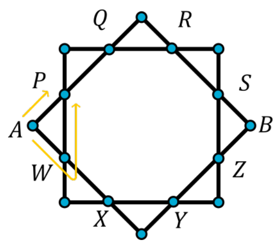
Entonces cada triangulito tiene un área equivalente a $1/16$ del área del cuadrado, es decir $4^2/16 = 1$ cm^2. En consecuencia el paralelogramo tiene $2 \times 1 = 2$ cm^2 de área.

9. Descartamos al $234, 23456, 2345678$ por ser números pares (divisibles entre 2). También podemos descartar al 12345 por ser múltiplo de 5, de manera que sólo tenemos que verificar 234567 y 23456789. Finalmente aplicamos el criterio que establece que un número es divisible por 3 cuando la suma de sus dígitos también lo es. Como $2+3+4+5+6+7 = 27$ es un múltiplo de 3, el número 234567 no puede ser primo, por lo que la respuesta debe ser 23456789.

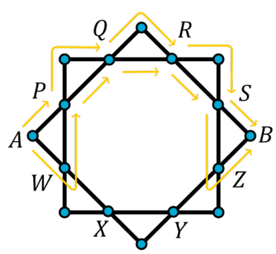
10. Por las condiciones del problema, tenemos que la altura del rectángulo más grande mide 15 cm. Si denotamos por a y b a las alturas de los rectángulos II y III, respectivamente, y por c a su base común, entonces tenemos por las condiciones de los perímetros que $a + c = 40/2 = 20$ cm y $b + c = 38/2 = 19$ cm. Sumando estas relaciones término a

término obtenemos $a+b+2c=39$ cm. Por otro lado, $a+b$ es la longitud de la altura del rectángulo mayor, es decir, $a+b=15$ cm. Por tanto, $c=12$ cm y en consecuencia la base del rectángulo mayor será igual a $c+6=18$ cm. Entonces, el perímetro del rectángulo mayor es igual a $2\times(18+15)=66$ cm.

11. Primero notemos que hay esencialmente dos maneras distintas de recorrer el laberinto: yendo por arriba o yendo por abajo. Enfoquémonos en el primer caso. Notemos que cualquier camino debe pasar forzosamente por los puntos P, Q, R, S marcados en la figura. Seguidamente, notemos que para ir de A a P hay dos caminos



De igual modo para ir de P a Q, de Q a R, de R a S y finalmente de S a B. Por



tanto, el camino de arriba se puede recorrer de $2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$ formas. Por tanto, el laberinto se puede recorrer de $32+32=64$ maneras.

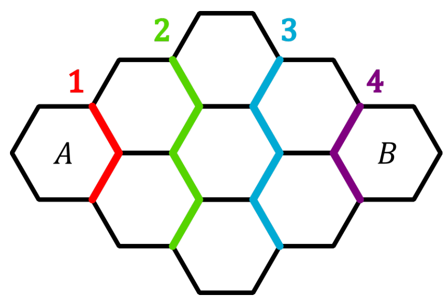
12. Los números que dividen en común a 360 y a 600 dividen al máximo común divisor de ellos, que denotamos por $(600,360)$. Entonces

$$(600,360)=(360,240)=(120,240)=120.$$

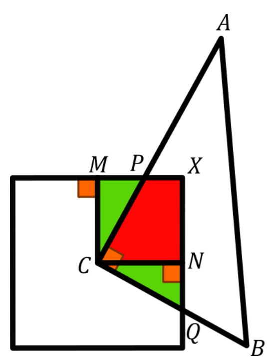
Luego como $120=2^3\times3\times5$ entonces los divisores de 120 deben tener un factor 2 elevado a la potencia 0, 1, 2 ó 3; un factor 3 elevado a la potencia 0 ó 1; un factor 5 elevado a la potencia 0 ó 1. Por lo tanto el número de divisores es $4\times2\times2=16$

13. Partimos el panal usando 4 divisiones como lo indica la figura. Notemos que el panal queda dividido en 5 regiones, siendo la primera región la que solo comprende a la casilla A y la quinta la que solo tiene a la casilla B.

Para pasar de la primera región a la segunda solo es posible hacerlo de dos maneras distintas. Ahora bien, estando en cualquiera de las dos casillas de la segunda región existen 4 maneras de pasar a la tercera. De manera similar, estando en cualquiera de las tres casillas de la tercera región existen 4 maneras de pasar a la cuarta. Finalmente desde cualquiera de las dos casillas de la cuarta región solo existen dos caminos posibles para llegar al final. Por tanto, el número total de caminos es $2 \times 4 \times 4 \times 2 = 64$.



14. Consideremos el siguiente dibujo y tracemos las alturas CN y CM.



Notemos que $\angle NCQ = 90° - \angle PCN = \angle MCP$. Por tanto, ΔMCP y ΔNCQ son congruente (criterio ALA) y por tanto tienen la misma área. Se concluye entonces que

$$\text{Área } (XPCQ) = \text{Área } (XMCN) = \frac{8}{4} = 2 \text{ cm}^2.$$

15. Como al dividir el número entre 3 se obtiene un cubo, entonces hagamos la lista de los primeros cubos $\{1, 8, 25, 64, 125, 216, 343...\}$ y multipliquémosla por 3 para obtener $\{3, 24, 75, 912, 375, 648, 1029, ...\}$. De estos números el más pequeño que al dividir entre dos es un cuadrado, es el 648.

16. Como la quinta parte del grupo come pastelito, el número de amigos debe ser múltiplo de 5. Pero si fueran 10 o más, el total de la cuenta sería \$350 o más, tan solo en café. Por tanto debe haber 5 amigos y solo uno comió pastelito. La cuenta termina siendo $5 \times 35 + 52 = 175 + 52 = 227$ pesos y al mesero le quedan \$23.

17. En el siguiente listado aparecen todas las posibles sumas de tres dígitos que dan 9 como resultado.

9+0+0	8+1+0	7+2+0	7+1+1	6+3+0	6+2+1
5+4+0	5+3+1	5+2+2	4+4+1	4+3+2	3+3+3

Si en la suma los tres dígitos son distintos, entonces cualquier permutación de ellos da como resultado un número feliz. Por tanto, hay en total $7 \times 3! = 42$ números felices en este caso. Por otro lado, si hay dos dígitos repetidos, entonces cada suma da lugar a 3 números, por lo que hay $4 \times 3 = 12$ números felices en este caso. Finalmente, si los tres dǵitos están repetidos, solo tenemos un caso (el 333). Entonces tenemos un total de $42 + 12 + 1 = 55$ números felices.

18. Notemos que hay $52 - 30 = 22$ estudiantes que no practican nado. También hay $52 - 35 = 17$ estudiantes que no practican futbol y $52 - 42 = 10$ estudiantes que no practican basquetbol. En consecuencia, hay a lo más $22+17+10 = 49$ estudiantes que no practican alguno de los deportes. Por tanto hay al menos $52 - 49 = 3$ estudiantes que practican los 3 deportes.

19. Si x es el número buscado, $x-1$ debe ser múltiplo de $2, 3, 4, 5, 6, 7$. En particular, debe ser divisible entre el mínimo común múltiplo de todos ellos, 420. Buscamos entonces, el mayor múltiplo de 420 que tiene 4 dígitos. Dado que $420\times 20 = 8400$ y $420\times 30 = 12600$, debemos buscar un factor entre 20 y 30. Pero $420 \times 25 = 10500$, $420 \times 24 = 10080$ y $420 \times 23 = 9660$. Entonces el número buscado será 9661.

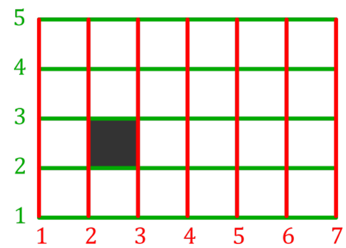
20. Consideremos la descomposición en factores primos $23,871 = 3 \times 73 \times 109$. Luego, el único número de dos cifras y el único número de tres cifras cuyo producto es 23,871 es 73 y 327. Por lo tanto la suma es 400.

21. Para que un número sea un cuadrado debe tener sus factores elevados a una potencia par. Luego
$$(25)^{64} \times (64)^{25} = (5^2)^{64} \times (2^6)^{25} = 5^{128} \cdot 2^{150} = 10^{128} \cdot 2^{22}.$$
Por lo que la raíz cuadrada es $N = 10^{64} \cdot 2^{11}$. De esta forma el número N termina en 64 ceros que no contribuyen a la suma de las cifras. Entonces la suma de las cifras de N es igual a la suma de las cifras de $2^{11} = 2048$ es decir, $2 + 0 + 4 + 8 = 14$.

22. Notemos que un rectángulo queda determinado por sus lados, es decir, por una pareja de rectas verticales y una pareja de rectas horizontales. Como el número de dichas parejas es $\binom{7}{2}$ y $\binom{5}{2}$, respectivamente, entonces tenemos un total de

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} = 21 \times 10 = 210$$

rectángulos.



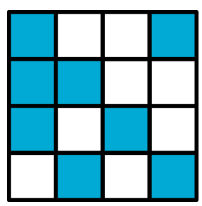
Para calcular el número de rectángulos que contienen al cuadrito negro, notemos que el lado izquierdo de uno de esos rectángulos solo puede estar sobre las rectas marcadas con los números 1 o 2 de la figura, en tanto que el lado derecho solo puede estar sobre las rectas 3, 4, 5, 6 o 7. De manera similar, el lado de abajo solo puede estar en las rectas 1 o 2, en tanto que el lado de arriba puede ubicarse en las rectas 3, 4 o 5. Por tanto, existen $2 \times 5 \times 2 \times 3 = 60$ rectángulos que contienen el cuadrito negro. Entonces la probabilidad de seleccionar uno de dichos rectángulos es $P = 60/210 = 2/7$.

23. Sea $L = AB$. Notemos que cada uno de los triángulos SAP, PBQ, QCR, RDS tienen alturas y bases que miden $L/2$ por lo que cada uno tiene un área igual a $L^2/8$. Por tanto, tomados en conjunto tienen un área equivalente a $4 \times (L^2/8) = L^2/2$, es de decir, la mitad del área del cuadrado $ABCD$. En consecuencia, el área del cuadrado $PQRS$ es igual a la mitad del área del cuadrado $ABCD$. Por otro lado, consideremos $\ell = PQ$ cada uno de los triángulos XPU, UQV, VRW, WSX tiene una base que mide $2\ell/3$ y una altura que mide $\ell/3$. Entonces cada uno tiene un área igual a $\ell^2/9$ y en conjunto tienen un área de $4\ell^2/9$. Por tanto, el área del cuadrado es $XUVW$ es $5\ell^2/9$, es decir, $5/9$ del área del cuadrado $PQRS$, o bien, $5/18$ del área del cuadrado $ABCD$.

24. El criterio de divisibilidad de 3 establece que el número será múltiplo de 3 cuando sus cuatro dígitos sumen un múltiplo de 3. Como las últimas dos cifras suman 5, es necesario que las dos primeras completen un múltiplo de 3. Para que la suma total sea 6, los otros dos tienen que sumar 1 y esto sólo es posible cuando el número es 1023. Para

que la suma total sea 9, es necesario que los dos primeros sumen 4, lo cual sucede de 4 formas: $1323, 2223, 3123, 4023$. Para que la suma total sea 12 es necesario que los dos primeros sumen 7, lo cual sucede de 7 formas: $1623, 2523, 3423, 4323, 5223, 6123, 7023$. Para que la suma total sea 15 es necesario que los dos primeros sumen 10, lo cual es posible de 9 formas: $1923, 2823, 3723, 4623, 5523, 6423, 7323, 8223, 9123$. Para que la suma total sea 18 es necesario que los dos primeros sumen 13, lo cual es posible de 6 formas: $4923, 5823, 6723, 7623, 8523, 9423$. Para que la suma total sea 21 es necesario que los dos primeros sumen 16, lo cual es posible de 3 formas: $7923, 8823, 9923$.Para que la suma total sea 24 es necesario que los dos primeros sumen 19, lo cual es imposible. Por tanto, la cantidad total de números $23-$ suertudos es $1 + 4 + 7 + 9 + 6 + 3 = 30$ formas.

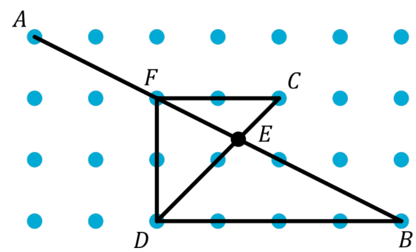
25. Demostremos que $n = 4$ es el máximo. Si $n = 5$, por el principio de las casillas existe un color (digamos negro) con al menos 13 puntos. Si hay algún renglón con 4 o más cuadros negros, se llega fácilmente -usando nuevamente el principio de las casillas- a un rectángulo monocromático negro. De lo contrario, hay al menos 3 renglones con exactamente 3 puntos negros, en cuyo caso se tiene nuevamente un rectángulo monocromático (ya sea negro o blanco). El siguiente dibujo ilustra un ejemplo con $n = 4$.



7.2. Nivel II

1. Notemos que ΔFEC y ΔBED son semejantes con razón de semejanza $1 : 2$. Por tanto tenemos que $BE = 2FE$ y entonces $BF = BE + FE = 3BE/2$. Por otro lado, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que $BF = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$. Así

$$BE = \frac{2}{3}BF = \frac{4\sqrt{5}}{3}\text{cm}.$$



2. Factorizamos repetidamente el denominador como diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 2^{64}-1 &= (2^{32}+1)(2^{32}-1) \\ &= (2^{32}+1)(2^{16}+1)(2^{16}-1) \\ &\vdots \\ &= (2^{32}+1)(2^{16}+1)(2^{8}+1)(2^{4}+1)(2^{2}+1)(2+1)(2-1). \end{aligned}$$

   Por tanto
$$\frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)}{2^{64}-1} = 1.$$

3. Visto como un paralelogramo de base DC y altura 60, el área d $ABCD$ es $10\times 60 = 600$. Por otro lado, podemos considerar BC como base del paralelogramo, en cuyo caso PQ será la altura. Entonces tenemos que $600 = BC \times PQ = 75 \times PQ$ y por tanto $PQ = 600/75 = 8$.

4. Consideremos $N = 10a + b$. Entonces tenemos que $10a + b = 3(a + b) + 8$, de donde podemos deducir $7a = 2(b+4)$. A partir de esta relación podemos deducir que 7 divide a $b + 4$. Ahora bien, como b es un número dígito, $b + 4$ no excede a $9 + 3 = 13$. Por tanto $b + 4 = 7$ y $b = 3$.

5. Denotemos por x, y, z, w la cantidad de preguntas que sólo Pedro contestó bien, que solo Pablo constestó bien, que ambos contestaron bien y que ninguno contestó bien, respectivamente. Si n denota el número de preguntas del examen, entonces tenemos que
$$z = \frac{n}{6}, \quad y + z = 7 \ \text{ y } \ y + w = \frac{n}{9}.$$
   De la primera ecuación podemos concluir que n es un múltiplo de 6. Por otro lado, como $n = x + y + z + w$, entonces tenemos que
$$x + z = n - (y + w) = \frac{8n}{9}$$

y en consecuencia n debe ser también un múltiplo de 9. De aquí podemos inferir que n es un múltiplo de $(6, 9) = 18$. Si $n = 18$ entonces $(x, y, z, w) = (13, 4, 3, -2)$, por lo que no hay solución. Si $n = 36$ entonces $(x, y, z, w) = (26, 1, 6, 3)$. Si $n > 36$ entonces $y < 0$, por lo que no hay solución. Así podemos concluir que la única solución es $x + z = 26 + 6 = 32$.

6. Sean x, y las medidas de los lados. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x \geq y$. La condición del problema establece que $xy = 2x+2y$, o de manera equivalente,

$$y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Como y es un número entero, necesariamente $x-2$ debe ser un factor de 4. Así tenemos que $x - 2$ puede tomar los valores 4, 2, 1, -1, -2 o -4. Si $x - 2 = 4$ entonces $x = 6$, $y = 3$ y $xy = 18$. Si $x - 2 = 2$ entonces $x = 4$, $y = 4$ y $xy = 16$. En todos los demás casos se obtiene $x < y$, contradiciendo nuestra hipótesis. Así que la suma de todos los posibles valores del área es $18 + 16 = 34$.

7. Observemos que hay $5^4 = 625$ números de cinco cifras que empiezan con 1, y de igual modo hay 625 números que empiezan con 2, 3 o 4. Así que un número de la forma $5{*}{*}{*}{*}$ está al menos en el lugar $4 \times 5^4 + 1 = 2501$. De manera similar, hay $5^2 = 25$ números de tres cifras que empiezan con 1 y la misma cantidad que empiezan con 2 o con 3. Por tanto, un número de la forma $514{*}{*}$ está al menos en el lugar $4\times 5^4+3\times 5^2+1 = 2576$. Finalmente, de 1 a 32 hay exactamente 12 números, así que el número $51, 432$ ocupa el lugar 2587 en la lista.

8. El total de números escritos en las primeras 99 filas es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 = \frac{99 \times 100}{2} = 4950.$$

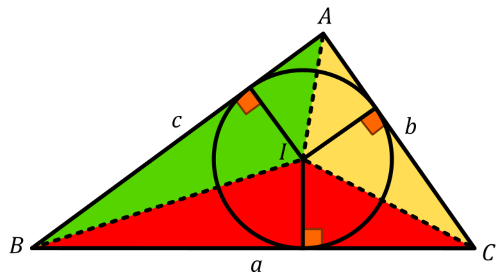
Por tanto los números escritos en la centésima fila son:

$$4951, 4952, 4953, \ldots, 5050.$$

La suma de todos estos números se puede calcular usando la suma de Gauss:

$$\begin{aligned} 4951 + 4952 + 4953 + \cdots + 5050 &= 100 \times 4951 + 1 + 2 + \cdots + 99 \\ &= 100 \times 4951 + \frac{99 \times 100}{2} \\ &= 500, 050. \end{aligned}$$

9. Denotemos por L al lado del triángulo y por r al radio de su circunferencia inscrita. Recordemos que el área de un trángulo equilátero de lado L es $A = \sqrt{3}L^2/4$.Además, el área de un triángulo en términos de su inradio es $A = s \times r$, donde $s = (a+b+c)/2$ es el semiperímetro (ver figura).



Por tanto igualando las fórmulas de área obtenemos

$$\frac{\sqrt{3}}{4}L^2 = \frac{3}{2}L \times r$$

de donde podemos deducir que

$$r = \frac{L}{2\sqrt{3}}.$$

La condición del problema establece que $3L = \pi r^2$. Sustituyendo obtenemos

$$\frac{L^2}{12} = r^2 = \frac{3L}{\pi}$$

o bien $L = 36/\pi$. Por tanto,

$$r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{36}{\pi} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}.$$

10. Primero notemos que como AB es paralelo a DC y AF es perpendicular a DC, entonces podemos concluir que AF es perpendicular a AB. Luego tenemos que $\angle FAB = 90°$. Como $\angle EAF = 45°$ por hipótesis, entonces $\angle BAE = 45°$ y en consecuencia ΔAEB es rectángulo e isósceles. Por tanto $AB = \sqrt{2}AE$. De manera totalmente análoga tenemos que $AD = \sqrt{2}AF$. Así

$$\text{Perímetro } (ABCD) = 2(AB + AD) = 2\sqrt{2}(AE + AF) = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8.$$

11. Si $k > 3$, entonces 4 divide a $k!$ y por tanto 2 divide a n^3. Como 2 es primo tenemos entonces que 2 divide a n. Así, $2^3 = 8$ divide a n^3 y 4 divide a $n^3 - k! = 2$, lo cual es un absurdo. Si $k = 1$ o $k = 2$, entonces n no es entero. La única solución es $(n, k) = (2, 3)$.

12. Usando paridad en la primera ecuación, obtenemos que al menos uno de los primos p_2, p_3, p_4 es igual a 2. El mismo argumento de paridad aplicado a la segunda ecuación reduce las opciones a $p_2 = 2$ o $p_3 = 2$. Restando las ecuaciones se tiene

$$9p_1 + 4p_2 - 3p_4 = 0,$$

o equivalentemente,

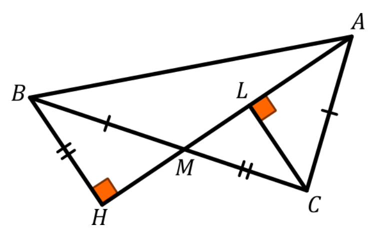
$$3p_4 - 9p_1 = 4p_2.$$

Como 3 divide a $3p_4 - 9p_1$, obtenemos que 3 divide a $4p_2$ y por tanto $p_2 = 3$. En consecuencia $p_3 = 2$. Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante

$$\begin{aligned} 2p_1 + 7p_4 &= 143 \\ 11p_1 + 4p_4 &= 131 \end{aligned}$$

se obtiene $p_1 = 5$ y $p_4 = 19$. Por tanto $p_1p_2p_3p_4 = 5 \times 3 \times 2 \times 19 = 570$.

13. Sea L el pie de la perpendicular bajada desde C sobre AM.



Entonces ΔLAC es un triángulo $30°-60°-90°$. Así que $LC = 1/2AC$. Por la semejanza de ΔLMC y ΔHMB se tiene que

$$\frac{BH}{BM} = \frac{LC}{MC} = \frac{BM}{2BH}.$$

Entonces $2BH^2 = BM^2$. Luego ΔBHM (y por tanto también ΔLMC) es rectángulo isósceles. Entonces $\angle MCL = 45°$. Si $\angle A$ es obtuso, $\angle ACB = 15°$. Si $\angle A$ es agudo, $\angle ACB = 105°$.

14. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que c es la hipotenusa, entonces

$$\frac{ab}{2} = a + b + c,$$

o de manera equivalente,

$$a + b - \frac{ab}{2} = -c.$$

Elevando al cuadrado y aplicando Pitágoras obtenemos

$$a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{4} + 2ab - a^2b - ab^2 = c^2 = a^2 + b^2$$

lo cual se simplifica a

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0.$$

Sumando 8 a cada lado de la igualdad y factorizando se llega a que

$$(a - 4)(b - 4) = 8.$$

Igualando con las posibles parejas de factores de 8 encontramos las únicas soluciones: $(a, b) = (5, 12)$ o $(a, b) = (6, 8)$.

15. Notemos que el número $A = n^3 + 2009n^2 + 27n$ tiene los mismos tres últimos dígitos que el número $B = n^3 + 9n^2 + 27n$. Además

$$B + 27 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = (n + 3)^3.$$

Es decir, $B + 27$ es un cubo perfecto que termina en 0. Por tanto $B + 7$ es un múltiplo de 10, y siendo un cubo perfecto, necesariamente será un múltiplo de $10^3 = 1000$. Así $B + 27$ termina en 000. Entonces los últimos tres dígitos de B son 973.

16. Factorizando obtenemos

$$(2^x + 3^y)(2^x - 3^y) = 55.$$

Como $2^x + 3^y > 2^x - 3^y$ y 55 se descompone en primos como $55 = 5 \times 11$, entonces solo existen dos opciones: $2^x + 3^y = 55$ y $2^x - 3^y = 1$, o bien, $2^x + 3^y = 11$ y $2^x - 3^y = 5$. En el primer caso, tras sumar ambas ecuaciones obtenemos $2^{x+1} = 2 \times 2^x = 55 + 1 = 56$, lo cual claramente es un absurdo. Procediendo de manera análoga en el segundo caso llegamos a $2^{x+1} = 16$, de donde obtenemos $x = 3$ y $y = 1$, la cual es la única solución.

17. Aplicando la fórmula de la suma de Gauss tenemos que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 17 = \frac{17 \times 18}{2} = 153.$$

De acuerdo a las condiciones del problema, existen enteros positivos x, y tales que $x < y \leq 17$ que cumplen

$$xy = 153 - (x + y).$$

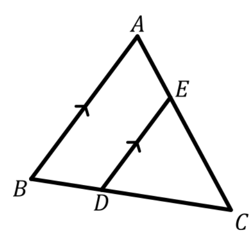
De esta última relación obtenemos

$$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1 = 153 + 1 = 154.$$

Factorizando 154 en primos tenemos $154 = 2 \times 7 \times 11$, de donde es fácil de ver que la única forma de expresar a 154 como producto de dos factores que no excedan 18 es $x + 1 = 11$ y $y + 1 = 14$. Por tanto $x = 10$ y $y = 13$, de modo que $x + y = 23$.

18. Por el teorema de Tales, tenemos que ΔABC y ΔEDC son semejantes. Denotemos por r a la razón de semejanza, es decir,

$$r = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC} = \frac{ED}{AB}.$$



De la igualdad de perímetros se deduce que

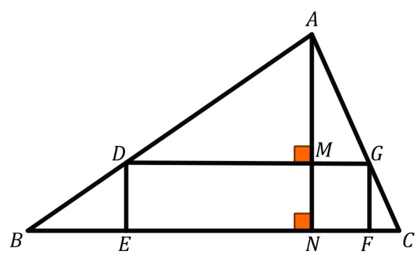
$$\begin{aligned} EC + DC &= AB + AE + BD \\ r \times AC + r \times BC &= AB + (1 - r) \times AC + (1 - r) \times BC \\ 27r &= 15 + 27(1 - r). \end{aligned}$$

Resolviendo esta última ecuación obtenemos $r = 21/27$ y por tanto

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BC}{DC} - \frac{DC}{DC} = \frac{1}{r} - 1 = \frac{2}{7}.$$

19. Consideremos la siguiente figura. Sean x, y las longitudes de la base y la altura del rectángulo, respectivamente. Puesto que DG es paralelo a BC tenemos por el teorema de Tales que ΔADG y ΔABC son semejantes. Entonces se cumple la proporción $DG/BC = AM/AN$, o de manera equivalente,

$$\frac{x}{10} = \frac{8-y}{8}.$$



De aquí podemos hallar x en términos de y:

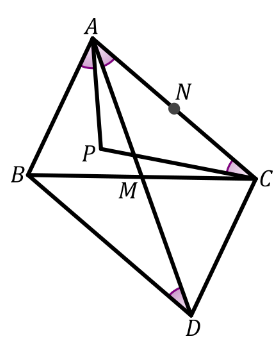
$$x = 10 - \frac{5}{4}y.$$

Por tanto,

$$xy = (10 - \frac{5}{4}y)y = -\frac{5}{4}y^2 + 10y = -\frac{5}{4}(y^2 - 8y) = -\frac{5}{4}(y-4)^2 + 20$$

y así tenemos que el producto xy se maximiza precisamente cuando $y = 4$ y $xy = 20$.

20. Sea D un punto tal que el cuadrilátero $ABDC$ es un paralelogramo (AB es paralela a CD y AC es paralela a BD).



Entonces $\angle ADB = \angle DAC = \angle ACP$. Además, $\angle BAD = \angle PAC$. Así que ΔABD y ΔAPC son semejantes. Notemos que PN es mediana de ΔAPC y BM es mediana de ΔABD, las cuales salen de los vértices respectivos P y B de los triángulos semejantes APC y ABD, respectivamente. De aquí que $\angle ANP = \angle AMB$.

21. Restamos $2ab$ a cada lado de la ecuación $a^2 + b^2 = 4ab$ para obtener

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 2ab.$$

Dado que $a < b$ entonces $a - b < 0$, por lo que al tomar raíces de ambos lados se concluye que

$$a - b = -\sqrt{2ab}.$$

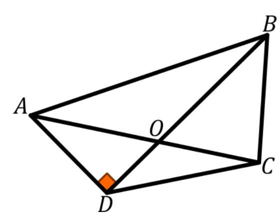
Procediendo de manera similar, si sumamos $2ab$ a cada lado de la ecuación original podremos concluir que

$$a + b = -\sqrt{6ab}.$$

Por tanto,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{-\sqrt{2ab}}{-\sqrt{6ab}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

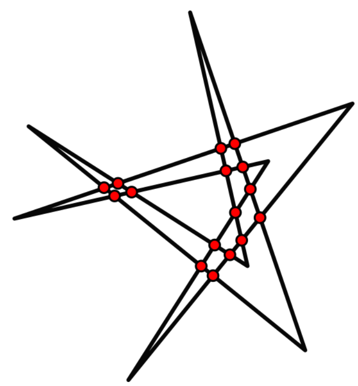
22. Primero notemos que ΔBAD es un triángulo $30° - 60° - 90°$ y por tanto, $AB = 2AD$.



Por otro lado, $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = 45°$, de donde podemos deducir que $\angle CDB = 45°$ y $\angle DBC = 75°$. Así notamos que C es un excentro de ΔBAD, pues sus ángulos exteriores en B y D son $150°$ y $90°$, respectivamente. Por tanto AO es bisectriz de $\angle DAB$. Aplicando el teorema de bisectriz se tiene

$$\frac{DO}{OB} = \frac{AO}{AB} = \frac{1}{2}.$$

23. Estimemos el máximo número de las intersecciones notando que cada lado de un cuadrilátero a lo más genera 4 intersecciones: que se formarían intersecando el lado dado con los 4 lados del otro cuadrilátero. Repitiendo este razonamiento en cada lado vemos que a lo más hay $4 \times 4 = 16$ intersecciones. Este máximo se obtiene considerando cuadriláteros no convexos como se ilustra en la siguiente figura.



24. Notemos que cada una de las operaciones (i) y (ii) preserva el máximo común divisor de las cantidades de piedras en cada pila. Como el máximo común divisor de los cinco números es 7, entonces en cada paso cada pila sigue teniendo un múlttiplo de 7 piedras. Como 2008 no es mútiplo de 7 este caso es imposible. Por otro lado, 2009 sí es mútiplo de 7. La siguiente sucesión de pasos indica como obtener 2009: $(42, 70, 105, 462, 2009) \longleftrightarrow (42, 35, 105, 462, 2009) \longleftrightarrow (7, 35, 105, 462, 2009)$. Como ya tenemos una pila con 7 piedras, le sumamos 7 a la segunda pila 1061 veces (pasos). Así obtenemos $(7, 35+7\times 1061, 105, 462, 2009)$ y se tienen en total 5×2009 piedras. Finalmente, dividiendo entre todas se obtiene el resultado requerido.

25. Recordemos la factorización

$$n^{k+1} - 1 = (n-1)(n^k + n^{k-1} + n^{k-2} + \cdots + n + 1).$$

Por tanto tenemos que $n-1$ divide a cualquier expresión de la forma $n^{k+1}-1$. Además podemos concluir que $(n-1)^2$ divide a $n^{2016}-1$ si y solo si $n-1$ divide a $N = n^{2015} + n^{2014} + n^{2013} + \cdots + n + 1$. Ahora bien, notemos que

$$N = (n^{2015} - 1) + (n^{2014} - 1) + (n^{2013} - 1) + \cdots + (n-1) + 2016$$

y en consecuencia $(n-1)^2$ divide a $n^{2016}-1$ si y solo si $n-1$ divide a 2016. Dado que 2016 se factoriza en primos como $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$, una breve inspección muestra que el mayor factor que no excede a 998 es $2^5 \times 3 \times 7 = 672$ y por tanto el número buscado es $n = 672 + 1 = 673$.

7.3. Nivel III

1. Como $DF/CF = 2$ entonces $DF = 2DC/3$. Por tanto

$$\text{Área } (\Delta ADF) = \frac{2}{3}\text{Área } (\Delta ADC) = \frac{1}{3}\text{Área } (ABCD) = \frac{1764}{3} = 588.$$

De manera similar, notemos que $BE = 5BC/7$ y por tanto

$$\text{Área } (\Delta ABE) = \frac{5}{7}\text{Área } (\Delta ABC) = \frac{5}{14}\text{Área } (ABCD) = \frac{5 \times 1764}{14} = 630.$$

Finalmente, $EC = 2BC/7$ y $FC = DC/3$ y en consecuencia

$$\text{Área } (\Delta ECF) = \frac{2}{21}\text{Área } (\Delta BCD) = \frac{1}{21}\text{Área } (ABCD) = \frac{5 \times 1764}{21} = 84.$$

Así

$$\text{Área } (\Delta AEF) = 1764 - 588 - 630 - 84 = 462.$$

2. Sea $m \geq 0$ un entero tal que $m^2 = \dfrac{n}{40-n}$. Entonces

$$n = \frac{40m^2}{m^2+1} = 40 - \frac{40}{m^2+1}.$$

Así vemos que $m^2 + 1 \geq 1$ debe ser un factor entero de 40. Considerando todos los posibles factores positivos, comprobamos que las únicas soluciones ocurren cuando

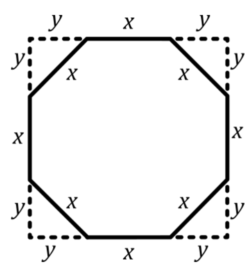
$$(m, n) = (0, 0),\ (1, 20),\ (2, 32),\ (3, 36).$$

3. Dado que el niño duerme solo en una habitación, las 7 niñas deben dividirse en 3 cuartos dobles y un cuarto sencillo. Así las niñas pueden dividirse en 3 parejas, (dejando una niña sin pareja) de

$$\frac{1}{3!} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times = \frac{21 \times 10 \times 3}{6} = 105$$

formas. Ahora procedemos a distribuir a los competidores en los cuartos. El niño tiene 5 opciones de habitaciones para escoger, luego la primera pareja de niñas tiene 4 opciones; la segunda pareja, 3 opciones; la tercera pareja dos opciones y finalmente la niña restante solo tiene una opción. Por tanto hay $5! = 120$ maneras de hacer esta distribución. Luego, existen $105 \times 120 = 12,600$ maneras en que se puede hacer la asignación de habitaciones.

4. Denotemos por x el lado del octágono. Notemos que en cada esquina se recortó un triángulo rectángulo isósceles de lado $y = x/\sqrt{2}$. Entonces tenemos que
$$2 \times \frac{x}{\sqrt{2}} + x = 1,$$
de donde se obtiene que
$$x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$
y por tanto $x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Finalmente, calculamos el área del octágono A restándole al área del cuadrado el área de los cuatro triángulos recortados:
$$A = 1 - 4 \times \frac{y^2}{2} = 1 - x^2 = 2\sqrt{2} - 2.$$



5. Notemos que de acuerdo a las condiciones del problema, tenemos que tanto $m + 11$ como $n + 9$ dividen a
$$mn + 9m + 11n + 145 = (m + 11)(n + 9) + 46.$$
Por tanto, tenemos que $n + 9$ divide a 46. Ahora bien, dado que $46 = 2 \times 23$ y $m + 11 \geq 11$, solo tenemos dos opciones: $m + 11 = 23$ o $m + 11 = 46$. Notemos además que la cantidad que cada estudiante del salón B donó es
$$x = \frac{(m + 11)(n + 9) + 46}{n + 9} = m + 11 + \frac{46}{n + 9}.$$
En el primer caso tenemos $(m, n) = (12, 14)$ y $x = 25$. Por otro lado, en el segundo caso tenemos $(m, n) = (35, 37)$ y $x = 47$.

6. Como $2 < \sqrt{5} < 3$, entonces tenemos que $m = \sqrt{5} - 2$ y por tanto
$$m^2 = (\sqrt{5} - 2)^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}.$$
Entonces
$$m^2 + 2(m + \sqrt{5} = 9 - 4\sqrt{5} + 2(2\sqrt{5} - 2) = 9 - 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 4 = 5$$

7. Denotemos por x la longitud del lado AD y por y la longitud del lado AB, de modo que el área del rectángulo $ABCD$ es xy. Como ΔADF tiene área 5, podemos concluir inmediatamente de la fórmula del área que $DF = 10/x$. De manera análoga podemos analizar el ΔABE y concluir que $BE = 8/y$. Así obtenemos

$$CF = y - \frac{10}{x} \quad \text{y} \quad CE = x - \frac{8}{y}.$$

Entonces

$$CE \times CF = (x - \frac{8}{y})(y - \frac{10}{x}) = xy - 18 + \frac{80}{xy}$$

Finalmente, como Área $(\Delta ECF) = 3$ tenemos $CE \times CF = 6$ y por tanto

$$xy + \frac{80}{xy} = 24,$$

o de manera equivalente,

$$(xy)^2 - 24xy + 80 = 0.$$

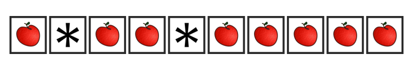
Resolviendo esta ecuación obtenemos los valores $xy = 20$ y $xy = 4$. En el primer caso tenemos

$$\text{Área } (\Delta AEF) = 20 - 3 - 4 - 5 = 8,$$

en tanto que el segundo caso no aporta ninguna solución.

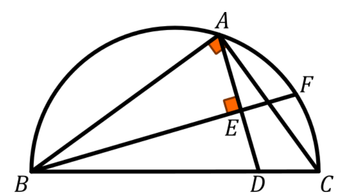
8. Dividamos la fruta paso a paso: primero las manzanas, luego las naranjas, las ciruelas y finalmente las mandarinas. Para dividir 8 manzanas entre 3 personas usamos 2 separadores, como se indica en la figura.

Cada manera de repartir las manzanas corresponde a una manera de elegir donde poner los separadores.



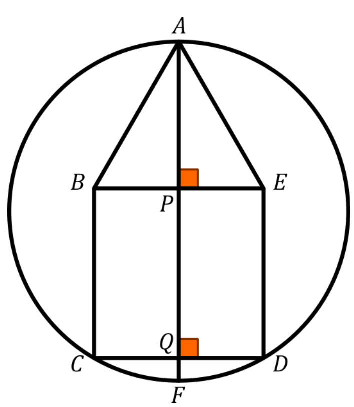
Como hay $8 + 2 = 10$ espacios para acomodar 2 separadores, el número de formas de repartir las manzanas es $\binom{10}{2} = 45$. Razonando de manera totalmente análoga, podemos repartir las naranjas de $\binom{5}{2} = 10$ maneras; las ciruelas de $\binom{4}{2} = 6$ maneras y las mandarinas de $\binom{3}{2} = 3$ maneras. De tal modo, la repartición de todas las frutas puede llevarse a cabo de $45 \times 10 \times 6 \times 3 = 8100$ maneras.

9. Sea F la intersección de BE con el circuncírculo del triángulo ABC. Como $\angle AFB = \angle ACB = 45°$ y $\angle FEA = 90°$, se tiene que AEF es un triángulo rectángulo isósceles. Sea M la intersección de AC con BF. Los triángulos rectángulos AEM y BEA son semejantes, luego
$$\frac{ME}{AE} = \frac{AE}{BE}.$$
Notemos que CF y AD son paralelas, pues ambas rectas son perpendiculares a BF. Así, por el teorema de Tales,
$$\frac{EF}{BE} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{2}.$$



En consecuencia
$$\frac{ME}{FE} = \frac{ME}{EA} = \frac{AE}{EB} = \frac{EF}{EB} = \frac{1}{2};$$
luego M es punto medio de EF y los triángulos rectángulos CFM y AEM son congruentes; en particular se tiene que $CF = AE = EF$, luego CEF es un triángulo rectángulo isósceles. De aquí que $\angle CED = 90° - \angle CEF = 90° - 45° = 45°$.

10. Tracemos el diámetro AF. Denotemos por P y Q los puntos en que AF interseca a BC y ED, respectivamente.



Como ΔABC es equilátero de lado 2 entonces tenemos que $AP = \sqrt{3}$ y por tanto $AQ = 2+\sqrt{3}$. Aplicamos potencia de un punto a Q para obtener $AQ \times QF = EQ \times QD$. Así podemos concluir que

$$QF = \frac{EQ \times QD}{AQ} = \frac{1 \times 1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

En consecuencia $AF = AQ + QF = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$, por lo que el radio de la circunferencia es $R = 2$.

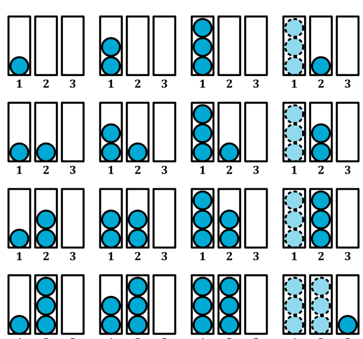
11. El jugador con menos monedas es p_n. Denotemos por m al número de monedas de p_n. Después de m rondas el juego termina con p_n teniendo $n(m+1)-1$ monedas (que recién recibió de p_{n-1}) y p_1 tiene $n-2$. Entonces $5(n-2) = n(m+1)-1$ y por tanto $n(4-m) = 9$, de donde se deduce $(m,n) = (1,3)$ o $(3,9)$. Por tanto hay $3+2+1 = 6$ o bien $11+10+\ldots+4+3 = 63$ monedas.

12. Denotemos por A_n el número que ocupa el lugar n dentro del conjunto A. Así tenemos que $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 5$, $A_4 = 7$, etc. Ahora bien, como el mínimo común múltiplo de 3, 4 y 5 es 60, el patrón de lugares se repetirá en ciclos de 60. Aplicamos el principio de inclusión y exclusión para obtener el número de términos en cada uno de estos ciclos:

$$60 - \left\lfloor \frac{60}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{60}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{3\times 4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{3\times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{4\times 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{60}{3\times 4\times 5} \right\rfloor = 36.$$

De aquí se deduce que $A_{36} = 60$ y por tanto $A_{72} = 120$. Finalmente, notemos que $A_7 = 13$ y en consecuencia $A_{79} = 120 + 13 = 133$.

13. En la siguiente figura podemos observar la distribución de las pelotas en los primeros 16 turnos.



A partir de aquí es fácil notar que el patrón que se sigue corresponde a la representación del número de turno en base 4. Como

$$2016 = 1 \times 4^5 + 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 2 \times 4^2,$$

entonces podemos conluir que al finalizar el turno 2016, las cajas marcadas con los números 1 y 2 están vacías, la caja con el número 3 tiene 2 pelotas, la caja con el número 4 tiene 3 pelotas, al igual que la caja con el número 5, y la caja con el número 6 tiene solo una pelota. Así, en total hay $1 + 3 + 3 + 2 = 9$ pelotas en las cajas.

14. Supongamos que solo los números 1 y 2 están escritos en el pizarrón. Entonces tenemos que

$$\frac{2+1}{2-1} = 3,$$

por lo que el 3 también aparecerá escrito en el pizarrón. Ahora notemos que

$$\frac{3+2}{3-2} = 5, \qquad \frac{5+3}{5-3} = 4,$$

de modo que 4 y 5 también aparecerán en el pizarrón. De manera análoga tenemos que 6 y 7 también aparecerán

$$\frac{4+3}{4-3} = 7, \qquad \frac{7+5}{7-5} = 4.$$

Este procedimiento se puede seguir llevando a cabo para demostrar que todos los números naturales aparecerán en el pizarrón. De manera general, si tenemos que los números $\{1, 2, 3, \ldots, 2k, 2k+1\}$ ya están escritos entonces

$$\frac{(k+2)+(k+1)}{(k+2)-(k+1)} = 2k+3, \qquad \frac{(2k+3)+(2k+1)}{(2k+3)-(2k+1)} = 2k+2$$

y en consecuencia $2k+2$ y $2k+3$ también aparecerán.

De manera similar, si en la pizarra están escritos inicialmente el 1 y el 3, entonces haciendo

$$\frac{3+1}{3-1} = 2$$

obtenemos el 2, y a partir de aquí seguimos el razonamiento anterior para concluir que en el pizarrón estarán escritos todos los números naturales.

15. Observemos que

$$\begin{aligned}
a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c} \quad &\Rightarrow \quad \frac{ab+1}{b}=\frac{bc+1}{c} \quad \Rightarrow \quad c(ab+1)=b(bc+1)\\
&\Rightarrow \quad abc+c=b^2c+b \quad \Rightarrow \quad abc-b^2c=b-c\\
&\Rightarrow \quad bc(a-b)=b-c \quad \Rightarrow \quad a-b=\frac{b-c}{bc}.
\end{aligned}$$

De manera análoga tenemos

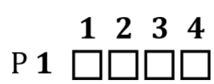
$$b-c=\frac{c-a}{ac}, \quad c-a=\frac{a-b}{ab}.$$

Al multiplicar estas ecuaciones se obtiene

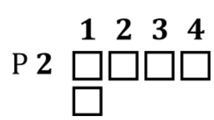
$$(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(abc)^2}.$$

Dado que a, b, c son distintos dos a dos, el producto $(a-b)(b-c)(c-a)$ no es cero y por tanto concluimos que $(abc)^2=1$. Así, $abc=\pm 1$.

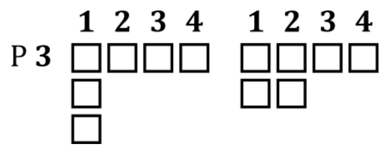
16. La primera persona tiene 4 opciones para formarse: ser la primera persona en cada una de las 4 filas. El siguiente diagrama ilustra las posiciones que puede tomar la primera persona enfrente de cualquier caja.



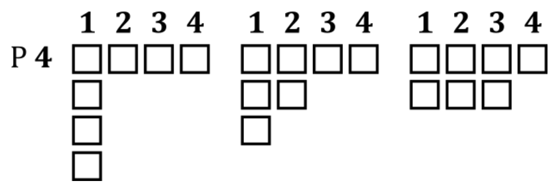
La segunda persona tiene 5 opciones: puede ser la primera persona en cada una de las tres filas vacías, o bien ser la primera o segunda persona en la fila donde está la primera persona.



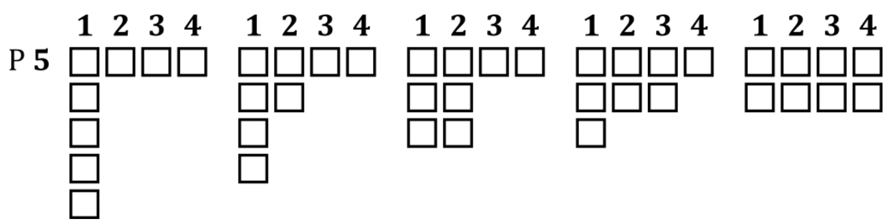
Para la tercera persona existen dos casos: si hay exactamente dos filas vacías, puede ocupar el primer lugar en cualquiera de ellas (2 opciones) o bien en cada una de las dos filas ocupadas por una persona tiene dos lugares distintos (ser la primera o segunda persona en dicha fila). Por otro lado, si hay tres filas vacías, puede ocupar el primer lugar en cualquiera de las filas vacías, o bien, cualquiera de los tres lugares en la fila que ya tiene 3 personas (adelante, enmedio o atrás). Notemos que en cualquiera de los casos, la tercera persona tiene 6 opciones.



Existen 3 casos para la cuarta persona, pero en cada uno de ellos hay 7 opciones, como lo indica el diagrama.

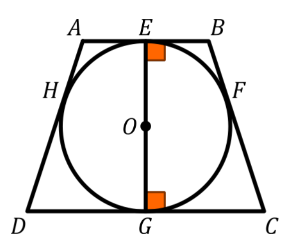


Finalmente, la quinta persona tiene 8 opciones, independiente de cualquiera de los 5 casos que se presentan.



Por tanto, existen $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 6720$ maneras en que cinco personas se formen en las cuatro cajas registradoras.

17. Denotemos por E, F, G, H los puntos de tangencia del círculo con el trapecio $ABCD$ y por O al centro de la circunferencia.



Como los radios OE y OG son perepndiculares a AB y DC, respectivamente y AB es paralelo a DC, entonces podemos concluir que EG es un diámetro de la circunferencia y por tanto $EG = 24$. Más aún, EG es una altura del trapecio. Aplicando la fórmula del área del trapecio obtenemos

$$\frac{AB + CD}{2} \times EG = 648$$

de donde se deduce

$$AB + DC = \frac{2 \times 648}{24} = 54.$$

Por otro lado, dado que las tangentes exteriores a una circunferencia miden lo mismo, tenemos que $HA = AE$, $EB = BF$, $FC = CG$ y $GD = DH$. En consecuencia tenemos

$$AB + CD = AE + EB + CG + GD = HA + BF + FC + DH = BC + DA.$$

Finalmente, tenemos

$$DA = AB + CD - BC = 54 - 25 = 29.$$

18. Denotemos por T y J las cantidades de monedas que tienen Tom y Jerry, respectivamente. Entonces las condiciones del problema se traducen en el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} J + n &= 2(T - n) \\ T + 2 &= n(J - 2). \end{aligned}$$

Eliminando T y despejando J llegamos a

$$J = \frac{7n + 4}{2n - 1}$$

y por tanto

$$2J = \frac{14n + 8}{2n - 1} = 7 + \frac{15}{2n - 1}.$$

De aquí podemos deducir que $2n - 1$ divide a 15. Por tanto $2n - 1 = 1, 3, 5$ o 15, o de manera equivalente, $n = 1, 2, 3$ u 8. Cada uno de estos valores de n da origen una solución válida del problema. Dichas soluciones son

$$(T, J) = (7, 11),\ (6, 6),\ (7, 5),\ (14, 4).$$

Así la suma de todos los posibles valores de n es $1 + 2 + 3 + 8 = 14$.

19. Sea $f(x) = x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$ y observemos que $f(x)$ es no decreciente para $x \geq 0$ y no creciente para $x < 0$. Notemos que $f(-3) = 81$ y $\lfloor x\rfloor \leq -4$ implica $\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor \geq 12$ y por tanto $\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor \leq -37$ y así $f(x) \geq 111$. En consecuencia, no existen soluciones si $x < 0$. Por otro lado como $f(3) = 81$, si $x > 0$ entonces x debe ser mayor a 3. Consideremos que $88/x = \lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$ es un entero y por tanto $n = 88/x \leq 88/3$. Con $n = 29$ no obtenemos solución. Con $n = 28$ obtenemos $x = 88/28 = 22/7$. Con $n = 27$ obtenemos $f(88/27) > 88$, por lo que a partir de aquí ya no hay solución. Por tanto $x = 22/7$.

20. Sean E en BC tal que $BE = BD$, y F en AB tal que FD es paralela a BC. Dado que $\angle BDE = \angle BED = 80°$, tenemos $\angle CED = 100°$ y $\angle CDE = 40°$. Además $\angle AFD = \angle ADF = 40°$ y $BF = DC$. Entonces $\angle FDB = 20° = \angle FBD$ y $BF = FD = DC$. Por tanto $\triangle AFD \cong \triangle ECD$ y en consecuencia $BC = BE + EC = BD + AD$.

21. Consideremos el polinomio $Q(x) = xP(x) - 1$. Es claro que $Q(x)$ es un polinomio de grado 2016 con raíces $x_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Por tanto

$$Q(x) = K(x-1)(x-2)...(x-2016)$$

donde K es una constante. Evaluando en $x = 0$ obtenemos

$$-1 = Q(0) = K(-1)(-2)...(-2016) = K(2016!)$$

y por tanto $K = -1/2016!$. Finalmente, evaluando en $x = 2017$ obtenemos

$$2017P(2017) - 1 = Q(2017) = -\frac{1}{2016!}(2016)(2015)...(1) = -1$$

y en consecuencia $P(2017) = 0$.

22. La diferencia entre dos números es un entero si y solo si las partes enteras de dichos números coinciden. Por tanto, existen k, m, n y $t \in [0, 1)$ tales que

$$x^{1919} = k + t, \quad x^{1960} = m + t, \quad x^{2001} = n + t$$

y por tanto

$$x^{41} = \frac{m+t}{k+t} = \frac{n+t}{m+t}.$$

Desarrollando obtenemos

$$t = \frac{m^2 - kn}{k - 2m + n}$$

y en consecuencia t es racional, y por tanto x^{41} también lo es. Como $(41, 1919) = 1$ tenemos que existen enteros a, b tales que $1 = 41a + 1919b$. Entonces $x = (x^{41})^a (x^{1919})^b$ es racional. Sea pues $x = p/q$ con $(p, q) = 1$. Supongamos que existe un primo r tal que r divide a q. Como la diferencia

$$x^{2001} - x^{1960} = \frac{p^{2001} - p^{1960} q^{41}}{q^{2001}}$$

es un número entero, se sigue rápidamente que r divide a p, lo cual contradice $(p, q) = 1$. Por tanto $q = 1$, con lo cual concluimos que x es entero.

23. Primero observemos que todos los triángulos rectángulos de la figura son semejantes y sus lados están en proporción

$$x : 1 : \sqrt{1 + x^2}.$$

Luego los lados de $\triangle DFE$ miden

$$\left(\frac{x}{x^2 + 1}, \quad \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

y los de $\triangle FHG$ miden

$$\left(\frac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad \frac{1}{(x^2 + 1)^2}, \quad \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} \right).$$

Por tanto, la relación $AH + HF + FD = 1$ se convierte en

$$x + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1} = 1.$$

Simplificando esta expresión se obtiene la relación buscada.

24. Notemos que $x \neq 0$. Sea

$$f_n(x) = x^n + x^{-n}.$$

Notemos que $f_0(x) = 2$ es entero. Si $n \geq 1$ entonces

$$f_n(x) = f_1(x) f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x).$$

Por induccion, $f_n(x)$ es entero si y solo si $f_1(x)$ es entero. Sea pues m entero tal que $m = f_1(x)$. Resolviendo la ecuación obtenemos

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1}$$

Por tanto, todos los números de esta forma (con $m \neq -1, 0, 1$) satisfacen la condición.

25. De la primera ecuación obtenemos

$$\frac{8}{b} = \frac{a^2 + 9}{a^2} = 1 + \frac{9}{a^2}.$$

Por tanto

$$1 - \frac{8}{b} + \frac{9}{a^2} = 0.$$

Siguiendo el mismo proceso en las restantes dos relaciones llegamos a

$$1 - \frac{10}{c} + \frac{16}{b^2} = 0, \qquad 1 - \frac{6}{a} + \frac{25}{c^2} = 0.$$

Sumando estas tres ecuaciones y reagrupando obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{6}{a} + \frac{9}{a^2} + 1 - \frac{8}{b} + \frac{16}{b^2} + 1 - \frac{10}{c} + \frac{25}{c^2} &= 0, \\ \left(1 - \frac{3}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{c}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

De esta última relación podemos deducir los valores $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Por tanto $a + b + c = 12$.

Prueba por Equipos.

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5 y 7 sólo se tomará en cuenta el resultado final y no se otorgarán puntos parciales. Los problemas 2, 4, 6 y 8 requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es de 60 minutos, que se distribuirá de la siguiente manera:

(i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema.

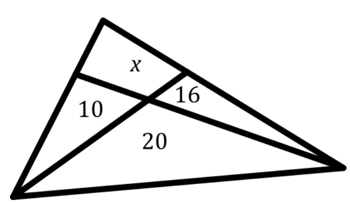
(ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron.

(iii) Durante los últimos 15 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

1. Encuentra todas las soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x^3 = 217 + y^3$$

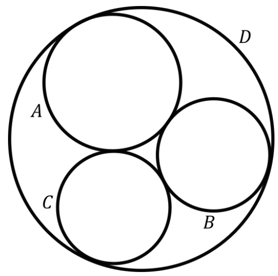
2. Dos segmentos dividen a un triángulo en 4 regiones, como lo indica la figura. Si las áreas de tres de las regiones miden 10, 16 y 20. Halla el área x de la región restante.



3. Divide un círculo usando 6 rectas, de manera que el número de regiones que se forma sea máximo.

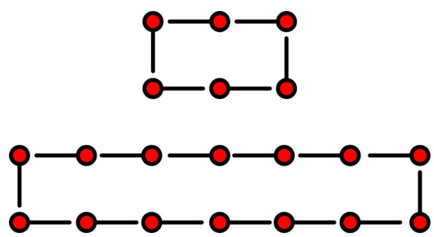
4. Si $x^2 - \dfrac{1}{x^2} = 2$, halla el valor de $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$.

5. Todos los círculos de la figura son tangentes. Los círculos B y C tienen radio 8, y el círculo A pasa por el centro del círculo D. Halla el radio del círculo A



6. ¿Cuántos triángulos no congruentes de lados enteros tienen perímetro 30?

7. El siguiente dibujo muestra una forma de usar 20 cerillos para constuir dos polígonos de manera que el área de uno de ellos es el triple del área del otro. Observa que un polígono usa 6 cerillos y el otro 14. Encuentra una forma de construir dos polígonos, uno con 7 y otro con 13 cerillos, de manera que uno de ellos tenga el triple del área del otro.



8. Drini inventó el siguiente juego:

   a) Toma un número n de 4 dígitos.

   b) A continuación considera el menor y mayor número que se pueden obtener permutando estos dígitos. Llámalos m y M respectivamente.

   c) Calcula la diferencia $M - m$.

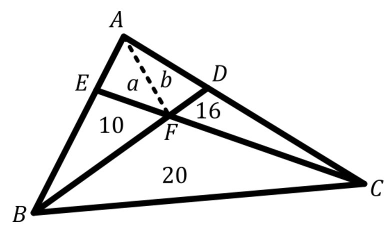
   d) Repite todo el proceso con $n = M - m$

   Demuestra que este juego eventualmente se detiene: es decir, se llega a un número que no cambia al aplicarle las reglas del juego.

Soluciones a la Prueba por Equipos.

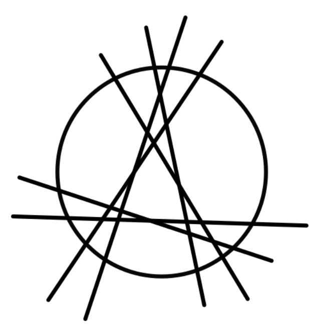
1. Tenemos
$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3=217=7\times 31$$
Como $x-y<x^2+xy+y^2$, solo tenemos dos opciones: $x-y=1$ y $x^2+xy+y^2=217$, o bien, $x-y=7$ y $x^2+xy+y^2=31$. El segundo caso no arroja soluciones enteras. Del primer caso se obtiene la única solución $(x,y)=(9,8)$.

2. Consideremos el siguiente dibujo, donde $a=$ Área (ΔAEF) y $b=$ Área (ΔADF).



Comparando triángulos con la misma altura obtenemos que
$$\frac{10+a}{20}=\frac{b}{16},\qquad \frac{16+b}{20}=\frac{a}{10}.$$
Resoviendo el sistema obtenemos $a=20$ y $b=24$, por lo que $x=a+b=44$.

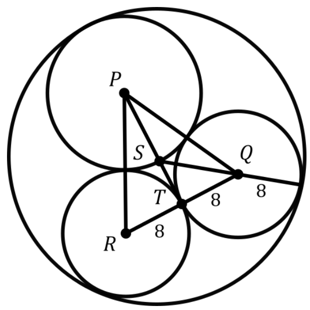
3. Son 22 regiones. El siguiente dibujo lo verifica:



4. Observemos que se tienen las relaciones
$$\frac{1}{x^4}=(x^2-2)^2,\qquad x^4-2x^2=1$$
Por tanto
$$x^4+\frac{1}{x^4}=x^4+(x^2-2)^2=2(x^4-2x^2+2)=2\times 3=6.$$

5. Sean P, Q, R, S los centros de las cuatro circunferencias y T el punto común de tangencia de las circunferencias de radio 8, como se indica en la figura. Sean $x = PX$ y $y = ST$. Entonces por el teorema de Pitágoras tenemos

$$(x+8)^2 = 8^2 + (x+y)^2, \qquad (2x-8)^2 = 8^2 + y^2.$$



Resolviendo el sistema se obtiene $x = 9$.

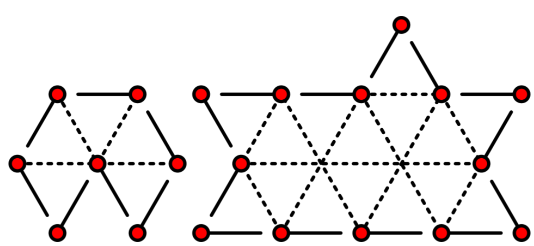
6. Sean $a \leq b \leq c$ los lados del triángulo. Entonces $a + b + c = 30$ y $c < a + b$. Notemos que $1 \leq a \leq 10$. Procedamos por casos respecto al valor de a. Analizaremos solo un caso, pues el procedimiento es escencialmente el mismo en cada caso. Supongamos que a=5. Entonces $c = 25 - b$ y $a + b = 5 + b$. Entonces las desigualdades $b \leq c$ y $c < a + b$ se traducen en $b \leq 25/2$ y $b > 10$. Por tanto $b = 11$ o $b = 12$, que dan como resultado $(a, b, c) = (5, 11, 14)$ y $(a, b, c) = (5, 12, 13)$. En total hay 19 soluciones:

$$(2,14,14),\ (3,13,14)\ (4,13,13),\ (4,12,14),\ (5,12,13).\ (5,11,14),$$

$$(6,12,12),\ (6,11,13),\ (6,10,14), (7,11,12),\ (7,10,13),\ (7,9,14)$$

$$(8,11,11),\ (8,10,12),\ (8,9,13),\ (8,8,14),\ (9,10,11).\ (9,9,12),\ (10,10,10)$$

7. Los siguientes polígonos satisfacen:



8. Sean $a \geq b \geq c \geq d$ las cifras del número (en algún orden). Entonces $M = abcd$ y $m = dcba$. Sea $pqrs = M - m$. Dividamos la prueba en casos:

   (i) Si $b > c$ entonces

   $$p = a - d, \quad q = b - c - 1, \quad r = c - b + 9, \quad s = d - a + 10$$

   Por tanto, tenemos 25 posibles valores para la diferencia en este caso:

   $$9801,\ 9711,\ 9621,\ 9531,\ 9441, 8802,\ 8712,\ 8622,\ 8532,\ 8442,\ 7803,\ 7713,\ 7623,$$

   $$7533,\ 7443,\ 6804,\ 6714,\ 6624,\ 6534,\ 6444,\ 5805,\ 5715,\ 5625,\ 5535,\ 5445$$

   (ii) Si $b = c$ entonces $p = a - d - 1$, $q = r = 9$, $s = d - a + 10$. Aquí solo hay 5 posibilidades

   $$9990,\ 8991,\ 7992,\ 6993,\ 5994.$$

   En cada uno de estos 30 casos el proceso se estaciona en 6174 (en a lo más 7 pasos).